Μαθημα 3ο 16/10/2017

Διαφ. Εξ.

Γραμμικη Ομογενης Εξ. α' ταξης

(E_0) : $y'(t) + p(t)y(t) = 0$ Ειναι παραγ. αρα και συνεχης

Εχουμε οτι $p: I \to \mathbb{R}$ συνεχης με I διαστημα

Ορισμος

Μια συναρτηση y θα καλειται λυση της y στο I αν:
$y \in C'(I)$ και η y ικανοποιει την (E_0) $\forall t \in I$

Προταση

Ας ειναι σημειο $t_0 \in I$

i) Ολες οι λυσεις της (E_0) δινονται απο τον τυπο

$$y(t) = c e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}, \quad t \in I \quad (c \text{ πραγμ. σταθερα})$$

ii) Υπαρχει ακριβως μια λυση της (E_0) με $y(t_0) = y_0$ για y_0 δεδομενο

Με αλλο τροπο: Το Π.Α.Τ $(E_0) \to y(t_0) = y_0$ εχει ακριβως μια λυση

Αποδειξη

i) Ειναι $y'(t) = \left[c e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}\right]' = c e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds} \left(-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds\right)' =$

$= \underbrace{c e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}}_{y(t)} (-p(t)) \Rightarrow y'(t) = -y(t)p(t) \Rightarrow$

$y'(t) + y(t)p(t) = 0$

Αρα η y ειναι λυση

αν $\tilde{y}(t)$, $t\in I$ μια λυση της (E_0) τοτε η συναρτηση
$$\tilde{y}(t)e^{\int_{t_0}^{t}p(s)ds}, \quad t\in I$$
Ειναι παραγωγισιμη στο I. Για $t\in I$ εχουμε

$$\tilde{y}'(t)e^{\int_{t_0}^{t}p(s)ds}+\tilde{y}(t)e^{\int_{t_0}^{t}p(s)ds}p(t)=$$

$$=e^{\int_{t_0}^{t}p(s)ds}\left[\tilde{y}'(t)+p(t)\tilde{y}(t)\right]=0 \Rightarrow \tilde{y}(t)e^{\int_{t_0}^{t}p(s)ds}=C$$

$$\Rightarrow \tilde{y}(t)=Ce^{-\int_{t_0}^{t}p(s)ds}$$

(*) βαζω οπου t το t_0 και βρισκω $y(t_0)=C$ την λυση

ii) αν y λυση του Π.Α.Τ $(E_0)-(y(t_0)=y_0)$ τοτε
$$y_0=y(t_0)=Ce^{-\int_{t_0}^{t_0}p(s)ds} \Rightarrow y(t_0)=C \quad (*)$$
οπα η $y(t)=y(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}p(s)ds}$ ειναι μια λυση του Π.Α.Τ

Γραμμικη μη ομογενης εξισωση α' ταξης

(E) $y'(t)+p(t)y(t)=q(t)$

$q,p: I\to\mathbb{R}$ συνεχεις στο I διαστημα

Ορισμος

Μια συναρτηση y θα καλειται λυση της (E) στο I αν.ν $y\in C'(I)$ και η y ικανοποιει την (E) $\forall t\in I$

Προταση

Ας ειναι $t_0\in I$ αυθαιρετο σημειο

i) Ολες οι λυσεις της (E) δινονται απο τον τυπο

$$y(t)=e^{-\int_{t_0}^{t}p(s)ds}\left[C+\int_{t_0}^{t}q(s)e^{\int_{t_0}^{s}p(n)dn}ds\right]$$

Για ασκηση

Εχω δυο λυσεις y_1, y_2 της ομογενης γραμ. εξισωσης που ισχυει

οτι $y_1(t^*) = y_2(t^*)$

Αυτο σημαινει οτι οι συναρτησεις μου ταυτιζονται

Ασκηση 14

xi) $(1+x^2)y' + xy = x \quad , x \in \mathbb{R}$

Το πανω πρωτα στη κανονικη μορφη

$$y' + \frac{x}{1+x^2} y = \frac{x}{1+x^2}$$

Εχουμε τη γενικη λυση

$$y(x) = e^{-\int \frac{x}{1+x^2} dx} \left[c + \int \frac{x}{1+x^2} e^{\int \frac{x}{1+x^2} dx} dx \right]$$

Βρισκω το ολοκληρωμα πρωτα

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) = \ln\sqrt{1+x^2}$$

οποτε τωρα εχω

$$y(x) = e^{-\ln\sqrt{1+x^2}} \left[c + \int \frac{x}{1+x^2} e^{\ln\sqrt{1+x^2}} dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left[c + \int \frac{x}{1+x^2} \sqrt{1+x^2}\, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left[c + \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \right] \Rightarrow y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left(c + \sqrt{1+x^2} \right) , x \in \mathbb{R}$$

Ασκηση 2

iii) $y' + y = \frac{1}{x^2+1}$, $y'(1)=2$, Π.Α.Τ

Γενική λυση

$$y(x) = e^{-\int 1 dx} \left(c + \int \frac{1}{1+x^2} e^{\int 1 dx} dx \right)$$

$$y(x) = e^{-x} \left(c + \int \frac{e^x}{1+x^2} dx \right)$$

! Αν δε μπορω να βρω το ολοκληρωμα τοτε δε μπορω να βρω λυση

Ας το παρω τοτε με οριομενο

$$y(x) = e^{-\int_1^x 1 ds} \left(y(1) + \int_1^x \frac{1}{1+s^2} e^{\int_1^s 1 dn} ds \right)$$

$$y(x) = e^{-(x-1)} \left(2 + \int_1^x \frac{e^{s-1}}{1+s^2} ds \right)$$

Παλι δε βρηκα συγκεκριμενη λυση αλλα βρηκα μια εκφραση της λυσης

! Μπορω να βρω το οριο ομως

→ >1 αρα αφου $x \to +\infty$ τοτε στο στο $+\infty$

→ Διακρινω περιπτωσεις

$$\lim_{+\infty} y(x) = \lim_{+\infty} \frac{2 + \int_1^x \frac{e^{s-1}}{1+s^2} ds}{e^{x-1}}$$

$$\ldots \overset{DLH}{\underset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{+\infty} \frac{\frac{e^{x-1}}{1+x^2}}{e^{x-1}} = \lim_{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Ασκηση 1.3

Να βρεθει μια συνεχης συναρτηση f ωστε ολες οι λυσεις της $y'(t)+y(t)=f(t)$ να τεινουν ασυμπτωτικα στο ∞ ως προς την $y=5t+3$

Γενικη λυση

$$y(t)=e^{-\int_0^t 1 ds}\left(c+\int_0^t f(s)\, e^{\int_0^s 1\, dn}\, ds\right)$$

$$y(t)=e^{-t}\left(c+\int_0^t f(s)e^s ds\right)$$

Θα πρεπει $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{y(t)}{t}=5$ και $\lim\left(y(t)- \quad\right)=0$

Η f ειναι της μορφης $as+b$ και ετσι μπορουμε να υπολογισουμε το ολοκληρωμα και βρισκουμε $y(t)$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{ce^{-t}+e^{-t}\int_0^t f(s)ds}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-\int_0^t f(s)ds}{te^t}=5 \Rightarrow$$

Θεωρω $f(t)=\lambda(t)(t+1)$ τοτε $\frac{f(t)}{t+1}=\lambda(t)$

Ασκηση 1.2

$f \in C'(I)$

$y'(t)+y(t) = f'(t)+f(t)$

θελω $y(t) \xrightarrow{t\to\infty} f(t)$

Αν ειναι y μια λυση της εξισωσης

Ειναι $y'(t)-f'(t) = f(t)-y(t)$

Για $z(t) = y(t)-f(t)$ εχουμε $z'(t)+z(t)=0$, $t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $z(t) = ce^{-\int_0^t 1\,dt}$ $\Rightarrow$ $z(t) = ce^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$

και $\lim_{+\infty} z(t) = 0$ $\Rightarrow$ $\lim_{+\infty} (y(t)-f(t)) = 0$

αν π.χ. ειχα $y'(t)+y(t) = \cos t + \sin t = (\sin t)' + \sin t$

τοτε $\lim_{\infty} (y(t)-\sin t) = 0$

Ιδιο προβλημα με αρχικη τιμη $y(0)=0$

δ Το προβλημα αρχικων τιμων εχει ακριβως μια λυση

Ασκηση 1.1

$$ay' + by = \kappa e^{-\lambda t} \quad , \quad a, b, \kappa > 0 \; , \; \lambda > 0$$

Η γενική λύση είναι

$$y(t) = e^{-\int_0^t \frac{b}{a} ds} \left(c + \int_0^t \kappa/a \; e^{-\lambda s} e^{\int_0^s b/a \, dn} ds \right) \Rightarrow$$

$$y(t) = e^{-\frac{b}{a}t} \left(c + \frac{\kappa}{a} \int_0^t e^{-\lambda s} e^{\frac{b}{a}s} ds \right) \Rightarrow$$

$$y(t) = c e^{-\frac{b}{a}t} + e^{-\frac{b}{a}t} \frac{\kappa}{a} \int_0^t e^{(\frac{b}{a} - \lambda)} ds$$

Παίρνουμε όριο

$\frac{b}{a} \neq \lambda$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0 + \frac{\kappa}{a} e^{-\frac{b}{a}t}$$